CPB Memorandum

Centraal Planbureau

Sector(en)	:	Groei, kennis en structuur
Afdeling(en)/Project	:	Integratie JADE-SAFE
Samensteller(s)	:	D.P. Broer
Nummer	:	123
Datum	:	11 juli 2005

Conversieregels voor vertragingsstructuren

Dit memorandum leidt regels af om vertragingsstructuren in een kwartaalmodel om te zetten naar een vertragingsstructuren in een jaarmodel, waarbij de paden van de varianten zoveel mogelijk onveranderd blijven. Er worden twee typen relaties onderscheiden, stock-flow relaties en zuivere flow relaties. Voor elk van beide typen relaties wordt een “optimale” tijdsaggregatieregel afgeleid.

1 Inleiding

Een van de vernieuwingen in het nieuwe SAFFIER model van het CPB is het naast elkaar bestaan van een jaarversie en een kwartaalversie van het model met ten naaste bij dezelfde eigenschappen in termen van varianten. Om dit te bereiken moeten de tijdsafhankelijke parameters in het model afhankelijk gemaakt worden van de periodelengte (jaren versus kwartalen). De beste manier om dit te doen is niet altijd eenvoudig neer te schrijven. In het geval van een simpele exponentiële aanpassing is het voldoende om de betreffende parameter met vier te vermenigvuldigen. In het algemeen echter treden “overloopeffecten” op. Een variabele die in het kwartaalmodel met een vertraging van één periode zijn invloed doet gelden zal in de jaarversie van het model zowel in het lopende als het volgende jaar effect hebben. Verdere complicaties treden op als een discrete vertraging en een zogenaamd error-correctiemechanisme (ECM) in dezelfde vergelijking naast elkaar voorkomen. In dat geval zal de ECM de discrete vertraging “uitsmeren” over potentieel meer dan twee jaren, afhankelijk van de grootte van de errror-correctiecoëfficiënt. Het probleem is gerelateerd aan het transformeren van continue tijd modellen naar discrete tijd, zie bijvoorbeeld Ten Cate (1993).

Dit memorandum presenteert transformatieregels die voor een bepaalde subklasse van tijdpaden identieke paden van varianten oplevert voor de kwartaal- en jaarversie van ECM relaties. De hier neergelegde regels zijn direct toepasbaar op conversies van modelrelaties in discrete tijd.[1] In paragraaf 2 wordt de algemene vorm van de te transformeren relaties beschreven, paragraaf 3 bespreekt de aggregatieregels die kunnen worden afgeleid voor vergelijkingen waarin de afhankelijke variabele een voorraadgrootheid is (paragraaf 3.1) en voor het geval de variabelen in zowel het linkerlid als het rechterlid stroomgrootheden zijn (paragraaf 3.2). Paragraaf 4 presenteert een aantal numerieke voorbeelden van conversieuitkomsten bij verschillende vertragingsverdelingen.

2 Model

Laat gegeven zijn de volgende vergelijking in ECM vorm

$$\Delta y_t = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \Delta x_{t-i} + (1-\gamma)\left(\varepsilon x_{t-1} - y_{t-1}\right) \tag{2.1}$$

(2.1) kan herschreven worden als

$$y_t = \sum_{j=0}^{m+1} \beta_j \sum_{i=0}^{\infty} \gamma^i x_{t-i-j} \tag{2.2}$$

[1] Er is een spreadsheet beschikbaar waarin de aggregatieregels worden geïmplementeerd. Dit kan worden opgevraagd bij de auteur (dpb@cpb.nl)

waarbij $\beta_0 = \alpha_0$, $\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_0 + (1-\gamma)\,\varepsilon$, $\beta_i = \alpha_i - \alpha_{i-1}$, $i \geq 2$. De relatie met Ten Cate (1993) wordt duidelijker als we (2.2) herschrijven als

$$y_t = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\, x_{t-k} \tag{2.3a}$$

$$b_k = \sum_{j=0}^{k} \beta_j \gamma^{k-j} \tag{2.3b}$$

$$= \gamma b_{k-1} + \beta_k$$

Hierbij hanteren we de conventie dat $\beta_j = 0,\ j > m$. We zien dus dat de vertragingscoëfficiënten b_k een convolutie zijn van de parameters β_j en γ^j. Het probleem is nu een vergelijking te specificeren voor een tijdsaggregaat van y_t en van x_t op basis van (2.3a) van de vorm

$$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i X_{t-i}$$

waarbij Y en X de tijdsaggregaten zijn. De vraag is hoe de coëfficiënten δ_i gerelateerd zijn aan de structuur in (2.2). Het antwoord op deze vraag hangt af van de definitie van Y_t. We behandelen eerst het geval dat de y_t en de x_t direct optelbaar zijn als niveau-variabelen (in tegenstelling tot het geval dat y_t een logarithme is). Voor dit "lineaire" geval moeten we dan nog onderscheid maken tussen stocks en flows. Als y een stroomvariabele is is het aggregaat Y gedefinieerd als $Y_t = \sum_i y_{t+i}$, terwijl voor een voorraadgrootheid aggregatie over de tijd niet nodig is. Immers, de kapitaalgoederenvoorraad aan het begin van het eerste kwartaal heeft dezelfde omvang als de kapitaalgoederenvoorraad aan het begin van het jaar. De consequenties van dit verschil voor de conversie van vertragingsstructuren worden verder uitgewerkt in paragraaf 3.1 en 3.2.

3 Aggregatieregels

3.1 Stock-flow relaties

Bij stock-flow relaties is de linkerhand variabele een voorraadgrootheid, terwijl een of meer rechterhand variabelen een stroomdimensie hebben.[2] In dit geval hoeven we in (2.3a) uitsluitend de x-variabele te transformeren. We definiëren de tijdsaggregaten van x en y als

$$X_t = \sum_{i=0}^{n-1} x_{t+i} \tag{3.1}$$

$$Y_t = y_t \tag{3.2}$$

[2] Een typisch voorbeeld is een vergelijking voor de vraag naar kapitaalgoederen, bv. $k_t = k_{t-1} + \lambda\,(\alpha y_t - k_{t-1})$. Hier is k de voorraadvariabel en y (output) de stroomvariabele.

waarbij n het aantal deelperioden is op het lagere aggregatieniveau. Om een abstracte discussie te vermijden zullen we naar x refereren als kwartaalcijfers en naar X als jaarcijfers, zodat dus $n = 4$.[3] De voorraadgrootheden y_t en Y_t zijn gedateerd op het eind van de periode. Het idee is nu dat we een benadering van (2.3a) opstellen die exact is voor het geval de x_{t+i} constant zijn over de deelperiodes $i = 0, \ldots, n-1$. Onder die veronderstelling geldt $x_{t+i} = X_t/n$ zodat we (2.3a) kunnen herschrijven tot

$$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} b_{j+in} x_{t-j-in} \quad \Rightarrow$$

$$Y_t \approx \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n-1} b_{j+in} \right) \frac{X_{t-in}}{n} \quad \Rightarrow \tag{3.3}$$

$$Y_t \approx \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i X_{t-in} \tag{3.4}$$

waarbij

$$\delta_i = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+in}$$

Onder de veronderstelling dat $\beta_j = 0,\ j > m$, kunnen we schrijven

$$\delta_i = \gamma^n \delta_{i-1}, \quad i > m/n$$

Dit levert op

$$Y_t = \delta_0 X_t + \delta_1 X_{t-n} + \delta_2 X_{t-2n} + \delta_3 \sum_{k=3}^{\infty} \gamma^{(k-3)n} X_{t-(k-1)n-1} \tag{3.5}$$

We kunnen vgl. (3.5) als volgt in ECM-format schrijven (zie (B.1) in Appendix B)

$$\Delta Y_t = A_0 \Delta X_t + A_1 \Delta X_{t-n} + A_2 \Delta X_{t-2n} + (1-\gamma_n)(\varepsilon_n X_{t-n} - Y_{t-n}) \tag{3.6}$$

$$A_0 = \delta_0$$

$$A_1 = \gamma \delta_1 - \delta_2 + \gamma \delta_2 - \delta_3$$

$$A_2 = \gamma \delta_2 - \delta_3$$

$$\varepsilon_n = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \frac{\delta_3}{1-\gamma_n}$$

3.1.1 Stock transformatieregels

Een vergelijking tussen (2.1) en (3.6) levert de volgende transformatieregels voor een overgang van kwartalen naar jaren ($n = 4$)

[3] Voor een conversie van maanden naar kwartalen zouden we $n = 3$ hanteren.

1. bereken de coëfficiënten van de ADL structuur in (2.3a) als

$$\beta_0 = \alpha_0$$
$$\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_0 + 1 - \gamma$$
$$\beta_i = \alpha_i - \alpha_{i-1}, \qquad i \geq 2$$

$$b_k = \sum_{j=0}^{k} \beta_j \gamma^{k-j}$$

2. bereken de coëfficiënten van $X_{t-(k-1)n}$ in (3.5) als

$$\delta_i = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+in}$$

3. de aanpassingscoëfficiënt van het n-periode aggregaat is

$$\gamma_n = \gamma^n$$

(NB: de aanpassings*snelheid* is gelijk aan $1 - \gamma_n$)

4. de lange-termijn coëfficiënt van X is

$$\varepsilon_n = \delta_0 + \delta_1 + \frac{\delta_2}{1 - \gamma_n}$$

5. De coëfficiënten van de Δ-termen in (3.6) zijn

$$A_0 = \delta_0$$
$$A_1 = \gamma_n \delta_1 - \delta_2 + \gamma_n \delta_2 - \delta_3$$
$$A_2 = \gamma_n \delta_2 - \delta_3$$

Merk op dat $A_2 = 0$ als $\delta_3 = \gamma \delta_2$, dwz. als de δ-reeks al vanaf de derde term meetkundig verloopt, omdat $\beta_k = 0$ voor $k \geq n$.

3.2 Zuivere flow relaties

Bij zuivere flow relaties zijn zowel de rechterhand variabelen als de linkerhand variabele stroomgrootheden. In dat geval moet dus de aggregatie (3.1) ook worden toegepast op de transformatie van y_t naar Y_t, omdat het in feite gaat om de bepaling van de gemiddelde stroom over het hele jaar. Dit verschil impliceert ook dat de aggregatieregels ingewikkelder zijn, omdat er *overloop* effecten tussen jaren optreden als het effect van x op y vertraagd optreedt. We zullen echter zien dat het rekenschema van paragraaf 3.1 gehandhaafd kan worden op een enkele uitbreiding na.

3.2.1 Lineaire aggregatie

Als de variabelen in niveau's zijn geformuleerd kunnen we het tijdsaggregaat van y analoog aan 3.1 definiëren als

$$Y_t = \sum_{i=0}^{n-1} y_{t+i} \tag{3.7}$$

We nemen tevens aan dat $m \leq 8$, zodat er geen korte-termijneffecten zijn met een vertraging van meer dan acht kwartalen. Als we (2.2) substitueren in de aggregatieregel (3.7) en vergelijking (A.1) uit Appendix A toepassen vinden we

$$Y_t = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\, b_k \frac{X_t}{n} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+(k-1)n+j} \right) \frac{X_{t-(k-1)n-1}}{n} \qquad \Leftrightarrow \tag{3.8}$$

$$Y_t = \delta_0 X_t + \delta_1 X_{t-n} + \delta_2 X_{t-2n} + \delta_3 \sum_{k=3}^{\infty} \gamma^{(k-3)n} X_{t-(k-1)n-1} \tag{3.9}$$

$$\delta_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\, b_k$$

$$\delta_k = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+(k-1)n+j} \qquad k \geq 1$$

Hierbij is k de jaarindex (NB: $\sum_{i=0}^{n} x_{t-i-(k-1)n} = X_{t-kn}$).

Merk op dat (3.9) dezelfde gedaante heeft als (3.5). Op basis van deze correspondentie kunnen we eenvoudig een generalisatie afleiden van het rekenschema uit paragraaf 3.1.1.[4]

3.2.2 Flow transformatieregels

1. bereken de coëfficiënten van de ADL structuur in (2.3a) als

$$\beta_0 = \alpha_0$$

$$\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_0 + 1 - \gamma$$

$$\beta_i = \alpha_i - \alpha_{i-1}, \qquad i \geq 2$$

$$b_k = \sum_{j=0}^{k} \beta_j \gamma^{k-j}$$

2. bereken de coëfficiënten van $X_{t-(k-1)n}$ in (3.9) als

$$\delta_0 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\, b_k$$

$$\delta_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+(k-1)n+j} \qquad k \geq 1$$

[4] Het enige verschil is punt 2 hieronder.

3. de aanpassingscoëfficiënt van het n-periode aggregaat is

$$\gamma_n = \gamma^n$$

(NB: de aanpassingssnelheid is gelijk aan $1-\gamma_n$)

4. de lange-termijncoëfficiënt van X is

$$\varepsilon_n = \delta_0 + \delta_1 + \frac{\delta_2}{1-\gamma_n}$$

5. De coëfficiënten van de Δ-termen in (3.6) zijn

$$A_0 = \delta_0$$
$$A_1 = \gamma_n\delta_1 - \delta_2 + \gamma_n\delta_2 - \delta_3$$
$$A_2 = \gamma_n\delta_2 - \delta_3$$

Merk op dat $A_2 = 0$ als $\delta_3 = \gamma\delta_2$, dwz. als de δ-reeks al vanaf de derde term meetkundig verloopt, omdat $\beta_k = 0$ voor $k \geq n$. In dat geval is er dus geen overloop effect van het kwartaalmodel naar ΔX_{t-2} in het jaarmodel aanwezig.

3.2.3 Logaritmische aggregatie

Bij een formulering in logaritmen zijn y_t en x_t gedefinieerd als logaritmen van de onderliggende niveaureeksen. De aggregatie regel (3.7) is nu niet toepasbaar, omdat $\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b$. We kunnen echter de volgende benadering hanteren

$$\ln Y_t \approx \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \ln y_{t+i} + \ln n$$

Deze benadering is exact als y_{t+i} constant is op het interval $\{t,\ldots,t+n-1\}$. We hanteren voor X_t dezelfde benadering, zodat $\sum_{k=0}^{n-1} \ln x_{t+k} \approx n \ln X_t/n$. De vgl. (3.8) verandert nu in

$$\begin{aligned}
n\ln\frac{Y_t}{n} &= \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\,b_k \ln\frac{X_t}{n} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{n-1} b_{i+(k-1)n+j}\right)\ln\frac{X_{t-(k-1)n-1}}{n} \qquad \Rightarrow \\
\ln Y_t &= \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\,b_k \ln X_t + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{n-1} b_{i+(k-1)n+j}\right)\ln X_{t-(k-1)n-1} \\
&\quad + \ln n\left[1 - \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\,b_k - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{n-1} b_{i+(k-1)n+j}\right)\right] \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

We zien dat (3.10) dezelfde structuur heeft als (3.8), afgezien van de grootte van de constante.

4 Voorbeelden

Tabel 4.1 bevat een paar voorbeelden van de uitkomsten van de conversieregels voor het flow model (paragraaf 3.2). De getallen onder de eerste stippellijn geven de parameterwaarden van de vergelijking in het kwartaalmodel, en de getallen onder de tweede stippellijn presenteren de uitkomsten van de transformatie naar een jaar-specificatie. We zien in kolom I dat ook als het kwartaalmodel géén korte-termijntermen bevat er toch een korte-termijnterm opduikt in het jaarmodel tgv. een "overloop" effect. Deze korte-termijnterm corrigeert voor het feit dat de ECM in het jaarmodel pas in het vijfde kwartaal actief kan worden, terwijl in het kwartaalmodel de exogenen hun invloed al in het tweede kwartaal doen voelen. Kolom II laat het effect zien van een verdeelde vertraging van korte-termijneffecten. Merk op dat de korte-termijncoëfficiënten ook in het jaarmodel optellen tot één. Dit is een gevolg van het feit dat de som van de coëfficiënten van de korte-termijneffecten in (2.1) optellen tot dezelfde waarde als de lange-termijncoëfficiënt.[5] Kolom III geeft een voorbeeld van de consequentie van een uiteenlopen van de som van de korte-termijnelasticiteiten en de lange-termijnelasticiteit: de coëfficiënt van ΔX_t wijzigt, terwijl de coëfficiënten van ΔX_{t-i} onveranderd blijven. Kolom IV laat het effect zien van een verschuiving van de korte-termijndynamiek met een half jaar. Hoewel in het kwartaalmodel alle korte-termijneffecten na anderhalf jaar zijn uitgewerkt, is er in het jaarmodel een overloop van de korte-termijndynamiek naar het derde jaar. Kolom V tenslotte laat zien wat het effect is van een hoge aanpassingssnelheid op de korte-termijncoëfficiënten in vergelijking met kolom II. Het is duidelijk dat de aanpassingssnelheid een grote invloed heeft op de overloop.

[5] Dwz. $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i = \varepsilon$

Tabel 4.1 conversies van kwartalen naar jaren

	I	II	III	IV	V
n	4	4	4	4	4
$1-\gamma$	0,1	0,1	0,1	0,1	0,5
ε	1	1	0,5	1	1
α_0	0	0,4	0,4	0	0,4
α_1	0	0,3	0,3	0	0,3
α_2	0	0,2	0,2	0,4	0,2
α_3	0	0,1	0,1	0,3	0,1
α_4	0	0	0	0,2	0
α_5	0	0	0	0,1	0
$1-\gamma_n$	0,34	0,34	0,34	0,34	0,94
ε_n	1	1	0,5	1	1
A_0	0,14	0,81	0,74	0,41	0,95
A_1	0	0,19	0,19	0,58	0,05
A_2	0	0	0	0,02	0

Bijlage A De aggregatieregel

We leiden de aggregatie regel af onder de veronderstelling dat de x_t constant is binnen elke periode, $x_{t+i} = x_t$, $i = 1,\ldots,n-1$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} y_{t+i} &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} b_k\, x_{t-k+i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=-i}^{\infty} b_{i+j} x_{t-j} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \sum_{j=-i}^{0} b_{i+j} x_{t-j} + \sum_{j=1}^{\infty} b_{i+j} x_{t-j} \right\} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j}^{n-1} b_{i-j} x_{t+j} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+j} x_{t-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j}^{n-1} b_{i-j} \frac{X_t}{n} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+(k-1)n+j}\, x_{t-(k-1)n-j} \qquad \Rightarrow \\
Y_t &= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\, b_k \frac{X_t}{n} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+(k-1)n+j} \right) \frac{X_{t-(k-1)n-1}}{n} \qquad \text{(A.1)}
\end{aligned}
$$

Bijlage B De conversie van een ADL naar een ECM

We gaan uit van een vergelijking van het type van (3.6) in paragraaf 3.2.1. Om de structuur van de transformatie duidelijk uit te laten komen nemen we *drie* vertraagde termen mee:

$$
\begin{aligned}
Y_t &= a_0 X_t + a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + a_3 X_{t-3} + a_4 \sum_{\tau=4}^{\infty} \gamma^{\tau-4} X_{t-\tau} \quad \Rightarrow \\
Y_t - \gamma Y_{t-1} &= a_0 \left(X_t - \gamma X_{t-1}\right) + a_1 \left(X_{t-1} - \gamma X_{t-2}\right) + a_2 \left(X_{t-2} - \gamma X_{t-3}\right) + a_3 \left(X_{t-3} - \gamma X_{t-4}\right) \\
&\quad + a_4 X_{t-4} \quad \Rightarrow \\
Y_t - Y_{t-1} &= a_0 \Delta X_t + \left(a_1 \gamma - a_2 + a_2 \gamma - a_3 + a_3 \gamma - a_4\right) \Delta X_{t-1} + \left(a_2 \gamma - a_3 + a_3 \gamma - a_4\right) \Delta X_{t-2} \\
&\quad + \left(a_3 \gamma - a_4\right) \Delta X_{t-3} + (1-\gamma) \left\{ \left(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \frac{a_4}{1-\gamma} \right) X_{t-1} - Y_{t-1} \right\} \qquad \text{(B.1)}
\end{aligned}
$$

Literatuur

Cate, A. ten, 1993, The current period coefficient of polynomial lag distributions, *Economic Modelling*, vol. 10, pag. 408–416.